DURÉE : 4 heures

Préliminaires

1° $\mathbb{R}^2$ est supposé muni d'une des normes habituelles notée $\| \ \|$.

$M_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients réels. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

. désigne le produit des matrices.

On identifie les éléments de $\mathbb{R}^2$ et les matrices à 2 lignes et 1 colonne.

On identifie les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et les matrices les représentant dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On munit $M_2(\mathbb{R})$ de la norme des endomorphismes :

$$\| L \| = \sup \{ \| L.X \| ; \quad X \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \| X \| \leqslant 1 \}.$$

On rappelle que, si P est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $M_2(\mathbb{R})$ et Q une fonction de $\mathbb{R}$ dans $M_2(\mathbb{R})$ ou dans $\mathbb{R}^2$, et si P et Q sont dérivables,

$t \to P(t).Q(t)$ est dérivable et

$$\frac{d}{dt}[P(t).Q(t)] = \frac{dP(t)}{dt}.Q(t) + P(t).\frac{dQ(t)}{dt}.$$

2° Dans tout le problème, A désigne un élément de $M_2(\mathbb{R})$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$\frac{dx}{dt} = A.x \tag{1}$$

(où les solutions x sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$).

Pour t appartenant à $\mathbb{R}$, on désigne par $P(t)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui à un élément X de $\mathbb{R}^2$ associe la valeur en t de la solution x de (1) qui vérifie

$$x(0) = X.$$

Tournez la page S. V. P.

3° Dans tout le problème, B désigne une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $M_2(\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle linéaire.

$$\frac{dx}{dt} = B(t).x \tag{2}$$

(où les solutions x sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$).

ENSET 1980 (A1 I)
- 26 -

I

1° *a.* Démontrer les propriétés suivantes :

i. $P(0) = I$

ii. $\forall t, s \in \mathbb{R} \quad P(t).P(s) = P(t+s)$

iii. P est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $M_2(\mathbb{R})$ et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{dP(t)}{dt} = A.P(t).$$

b. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Montrer que, pour toute solution x de l'équation avec second nombre

$$\frac{dx}{dt} = A.x + f(t),$$

on a la relation

$$\forall r, t \in \mathbb{R} \quad x(t) = P(t-r).x(r) + P(t).\int_r^t [P(-s).f(s)]\,ds.$$

2° On suppose, dans cette question, que φ et ψ sont deux fonctions continues de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$, que l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(t)\,dt$ est convergente et qu'il existe $a \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \infty[, \quad \psi(t) \leqslant a + \int_0^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds.$$

Montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \infty[\quad \psi(t) \leqslant M.$$

(On pourra faire intervenir, pour $0 \leqslant R \leqslant S$, $M_{R,S} = \sup_{s \in [R,S]} \psi(s)$.)

.../...

3° On suppose, dans cette question, que φ et ψ sont deux fonctions continues de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$, que l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(t)\,dt$ est convergente, qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \infty[\qquad \psi(t) \leqslant M$$

et que

$$\forall t \in [0, \infty[\qquad \psi(t) \leqslant \int_t^\infty \varphi(s)\,\psi(s)\,ds.$$

Montrer qu'il existe $r \geqslant 0$ tel que ψ est nulle sur $[r, \infty[$.

II

1° Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

i. $\exists M \geqslant 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \| P(t) \| \leqslant M$

ii. $\forall x$ solution de (1) $\quad \exists M_x \geqslant 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \| x(t) \| \leqslant M_x$

iii. $A = 0$ ou $\exists a > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + a$.

On suppose, dans la suite de cette partie, que ces propriétés sont réalisées et que, en outre, l'intégrale $\int_0^\infty \| B(t) - A \|\,dt$ est convergente.

2° Soit x une solution de (2).

a. Montrer qu'il existe $N \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant 0 \quad \| x(t) \| \leqslant N.$$

b. En déduire l'existence d'une solution unique y de (1) telle que

$$\lim_{t \to +\infty} \| x(t) - y(t) \| = 0.$$

3° *a.* Soit x une solution de (2) admettant une limite nulle quand t tend vers $+\infty$. Montrer que x est nulle.

b. En déduire que l'application qui, à x solution de (2), associe la solution y de (1) vérifiant

$$\lim_{t \to +\infty} \| x(t) - y(t) \| = 0$$

est un isomorphisme de l'espace des solutions de (2) sur l'espace des solutions de (1).

III

On suppose, dans cette partie, que A est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que l'intégrale $\int_0^\infty t \,\| B(t) - A + t\,B(t).A \|\,dt$ est convergente.

1° Déterminer $P(t)$ pour tout t.

2° Soit x une solution de (2).

a. Montrer qu'il existe $N \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant 0 \quad \| P(-t).x(t) \| \leqslant N.$$

b. En déduire l'existence d'une solution unique y de (1) telle que

$$\lim_{t \to +\infty} \| x(t) - y(t) \| = 0.$$

3° *a.* Montrer que, si x est une solution de (2) admettant une limite nulle quand t tend vers $+\infty$,

$$\lim_{t \to +\infty} \| P(-t).x(t) \| = 0.$$

b. Montrer que l'application qui, à x solution de (2), associe la solution y de (1) vérifiant

$$\lim_{t \to +\infty} \| x(t) - y(t) \| = 0$$

est un isomorphisme de l'espace des solutions de (2) sur l'espace des solutions de (1).

IV

Soient a et b des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que les intégrales $\int_0^\infty t \,|\, a(t) \,|\, dt$ et $\int_0^\infty t \,|\, ta(t) + b(t) \,|\, dt$ soient convergentes. On considère l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 :

(3) $$x'' + b(t)\,x' + a(t)\,x = 0.$$

Montrer que, si x est solution de (3), il existe un unique polynôme du premier degré, y, tel que

$$\lim_{t \to +\infty} | x(t) - y(t) | = 0$$

et que l'application $x \to y$ ainsi définie est un isomorphisme de l'espace des solutions de (3) sur l'espace des polynômes du premier degré.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail